文章编号:1000-4939(2023)05-1171-09

岩石类材料拉裂过程模拟的三维可开裂拉格朗日元方法

王学滨[1,2],田锋[2],马冰[2],钱帅帅[2]

(1. 辽宁工程技术大学计算力学研究所,123000 阜新;2. 辽宁工程技术大学力学与工程学院,123000 阜新)

摘　要:本研究提出了适于模拟岩石类材料变形-拉裂过程的三维可开裂拉格朗日元方法,其实质是三维拉格朗日元方法与断裂力学中虚拟裂缝模型的耦合方法,主要适用于立方体单元。以三维拉格朗日元方法为基础,引入虚拟裂缝模型的具体过程主要包括 3 个关键步骤:首先,通过节点周围单元的应力获取节点的应力,进而利用节点的最大主应力和岩石单轴抗拉强度进行节点分离判断;然后,选择与节点最大主应力垂直平面最接近的单元边界作为裂缝扩展方向;最后,引入虚拟裂缝模型模拟裂缝的萌生和扩展过程。利用该方法模拟了单轴拉伸岩样和三点弯曲岩梁的变形-拉裂过程,并初步分析了Ⅰ型断裂能、岩样高度和单元尺寸的影响。同时,通过将本研究结果与单轴拉伸岩样峰值应力、临界位移的理论解和前人位移控制加载条件下三点弯曲岩梁的载荷-位移曲线的数值解进行对比,验证了本研究方法的正确性,这为将来的工作奠定了良好的基础。

关键词:三维可开裂拉格朗日元方法;虚拟裂缝模型;单轴拉伸;三点弯曲;网格依赖性;尺寸效应

中图分类号:O39　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2023.05.023

A three-dimensional crackable Lagrangian element method for modelling tensile cracking processes of rock-like materials

WANG Xuebin[1,2],TIAN Feng[2],MA Bing[2],QIAN Shuaishuai[2]

(1. Institute of Computational Mechanics,Liaoning Technical University,123000 Fuxin,China;
2. College of Mechanics and Engineering,Liaoning Technical University,123000 Fuxin,China)

Abstract:A three-dimensional crackable continuous-discontinuous method mainly suitable for cube elements is proposed to simulate deformation and tensile cracking processes of rocks. Its essence is a hybrid method of the three-dimensional Lagrangian element method and the fictitious crack model in fracture mechanics. Introduction of the fictitious crack model into the three-dimensional Lagrangian element method consists of three key steps. First,the nodal stress is obtained by averaging stresses of elements around the node,and the nodal separation is assessed according to the maximum principal stress of the node and the uniaxial tensile strength. Then,the element boundary closest to the plane perpendicular to the maximum principal stress of the node is selected. Finally,the fictitious fracture model is introduced to simulate the

收稿日期:2021-01-04　　**修回日期**:2021-04-28
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 52074142);辽宁工程技术大学学科创新团队资助项目(No. LNTU20TD-19)
通信作者:王学滨,教授。E-mail:wxbbb@263.net
引用格式:王学滨,田锋,马冰,等. 岩石类材料拉裂过程模拟的三维可开裂拉格朗日元方法[J]. 应用力学学报,2023,40(5):1171-1179.
WANG Xuebin,TIAN Feng,MA Bing,et al. A three-dimensional crackable Lagrangian element method for modelling tensile cracking processes of rock-like materials[J]. Chinese journal of applied mechanics,2023,40(5):1171-1179.

processes of crack initiation and propagation. Deformation and tensile cracking processes of specimens in uniaxial tension and three-point bending are simulated by using the present method. The effects of I-type fracture energy, rock specimen height and elements size on the direct tension processes are analyzed. Meanwhile, through comparing the present results with the theoretical peak stress and critical displacement of the specimen in direct tension and the numerical load-displacement curve of the specimen in three-point bending, the correctness of the proposed method is verified, laying a good foundation for future work.

Key words: three-dimensional crackable Lagrangian element method; fictitious crack model; uniaxial tension; three-point bending; mesh-dependence; size effect

在高地应力作用下隧洞围岩的板裂化、采矿活动引起的地下岩层离层和地表裂缝中,拉裂现象是十分普遍的[1-2]。因此,研究岩石类材料的变形-拉裂过程具有重要的理论和实际意义。

现有的数值模拟方法可被划分为 3 大类:连续方法、非连续方法和连续-非连续方法。连续方法适于模拟连续介质的变形和破坏。非连续方法适于模拟非连续介质的开裂和运动[3-6]。连续方法的不足是功能受限,仅能在一定程度上处理非连续问题。非连续方法的不足是应力和应变的精度低,通常需要在未开裂时就引入了一些刚度参数。为了避免上述两种方法的各自不足,连续-非连续方法(耦合方法)应运而生[7-11],兼具上述两种方法的各自优势。

二维拉格朗日元方法与离散元方法的耦合方法是一种国内自主研发的连续-非连续方法[12-13]。该方法适于模拟连续介质向非连续介质转化和非连续介质进一步演化,其正确性已从多方面进行了验证[14-16]。文献[14]模拟了单轴拉伸岩样的变形-开裂过程,并通过将分离节点的最大法向力等的数值解与理论解对比,验证了该方法的正确性;文献[15]模拟了三点弯曲岩梁的变形-开裂过程,并通过将梁的载荷-位移曲线等的数值解与前人数值解对比,验证了该方法的正确性;文献[16]在原有二维连续-非连续方法的基础上引入了Ⅱ型断裂能,并模拟了直接剪切岩样的变形-开裂过程,通过将岩样上端面平均剪应力-水平位移曲线和水平坐标轴所围面积与Ⅱ型断裂能取值对比,验证了该方法的正确性。应当指出,该方法仅适于二维问题,并没有广泛的适用性。因此,迫切需要发展三维连续-非连续方法[17]。

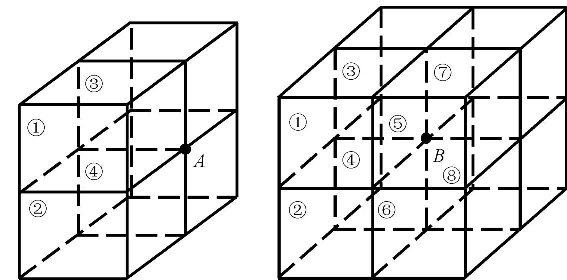
本研究在三维拉格朗日元方法的基础上引入了断裂力学中的虚拟裂缝模型,提出了适于模拟岩石类材料变形-拉裂过程的三维可开裂拉格朗日元方法,并模拟了单轴拉伸岩样的变形-拉裂过程,初步分析了Ⅰ型断裂能、岩样高度和单元尺寸的影响。还模拟了三点弯曲岩梁的变形-拉裂过程。本研究工作为将来工作(引入三维块体接触算法)奠定了良好的基础。

1 三维可开裂拉格朗日元方法简介

1.1 三维拉格朗日元方法的基本原理

拉格朗日元方法的实质是基于拉格朗日网格的连续介质有限差分单元离散的中心差分求解方法[18]。首先,利用几何方程和本构方程求解应力和应变;然后,利用虚功原理求解节点的弹性力;最后,利用中心差分形式的运动方程求解节点的加速度。重复上述 3 个步骤,直到获得满意的解为止。

可将三维情形下连续介质离散成具有 8 个节点的六面体单元。这样,对于位于连续介质表面的 1 个节点,可能被 4 个六面体单元共用(图 1a 中节点 A 被单元①~④共用),而对于位于连续介质内部的 1 个节点,可能被 8 个六面体单元共用(图 1b 中节点 B 被单元①~⑧共用)。应当指出,图 1 中①~⑧均为单元编号,分别被标记在每个单元面向读者的面的左上角。有时,为避免单元编号和其他标记发生重合,略微调整位置。后文同样存在类似情况,不再赘述。



(a) 位于连续介质表面的节点A (b) 位于连续介质内部的节点B

图 1 位于连续介质表面和内部的节点

Fig. 1 Nodes located on the surface and inside of the continuous medium

1.2　三维可开裂拉格朗日元方法

三维可开裂拉格朗日元方法的实质是三维拉格朗日元方法与断裂力学中的虚拟裂缝模型的耦合方法，其 3 个关键步骤如下。

1）节点分离判断。在三维拉格朗日元方法中，节点本身并无应力，只有单元才有应力。自然地，若要判断某一节点是否发生分离，应考虑该节点周围单元的应力。节点 l 的应力 σ_{ij}^{l} 为该节点周围单元的应力的平均值，即

$$\sigma_{ij}^{l} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sigma_{ij}^{[m]} \tag{1}$$

式中：n 为共用该节点的单元数目；$\sigma_{ij}^{[m]}$ 为 n 个单元中任一个的全应力，$m = 1, 2, \cdots, n$。

在三维拉格朗日元方法中，采用了混合离散方法以避免沙漏。先采用两种方式对同一单元进行离散，即两种覆盖（图 2 中 1 ~ 8 为六面体单元各个节点的编号），再对两种结果进行平均。这样，$\sigma_{ij}^{[m]}$ 为

$$\sigma_{ij}^{[m]} = \frac{1}{2}\frac{\sum_{k=1}^{10}\sigma_{ij}^{\langle K\rangle}V^{\langle K\rangle}}{\sum_{k=1}^{10}V^{\langle K\rangle}} \tag{2}$$

式中：$V^{\langle K\rangle}$ 为某一六面体单元被混合离散成的 10 个四面体子单元中任一个的体积；$\sigma_{ij}^{\langle K\rangle}$ 为任一四面体子单元的应力。

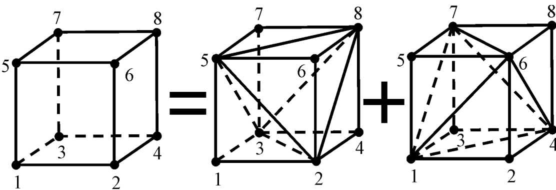


图 2　两种覆盖

Fig. 2　Two kinds of overlays

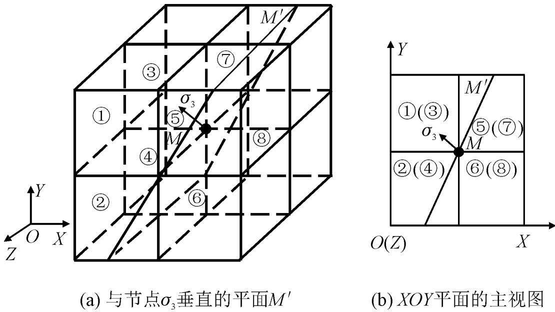
利用最大拉应力准则[12]对节点是否发生分离进行判断，即

$$\sigma_3 > \sigma_t \tag{3}$$

式中：σ_t 为岩石的单轴抗拉强度；σ_3 为最大主应力。

2）分离方向选择。节点的分离方向与岩石的开裂路径紧密相关。目前，仅允许沿单元边界开裂。显然，模拟复杂问题时，单元尺寸不应过大。否则，可能导致锯齿形开裂路径。应当指出，裂缝的理论开裂方向可能会位于单元内部，但在本研究方法中裂缝并不能沿着单元内部扩展，而是选择与理论开裂方向最接近的单元边界作为实际开裂方向，这具有无需改变时步长度的特点。对于以下研究的正六面体单元和加载条件，不存在锯齿形开裂路径的可能性，因为岩石的拉裂发生在水平或垂直方向上。

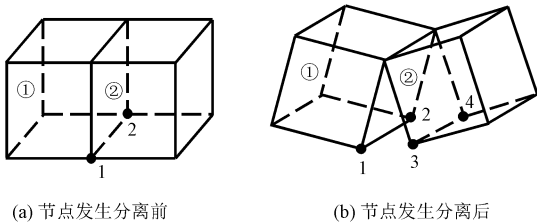
选择与节点的 σ_3 垂直的平面 M'（该平面过单元①～⑧共用的节点 M，且垂直于节点 M 的 σ_3，见图 3a，图 3b 为图 3a 的主视图）最接近的单元边界作为裂缝扩展方向。在此分离方向上，一个节点将分离成两个分离节点，其中一个分离节点继承原节点编号，而另一个分离节点拥有新编号。例如，在节点发生分离前，单元①和②共用节点 1 和 2（图 4a）；在节点发生分离后，单元①的节点 1 和 2 为继承原节点编号的分离节点，单元②的节点 3 和 4 为拥有新编号的分离节点（见图 4b）。



(a) 与节点σ_3垂直的平面M'　　(b) XOY平面的主视图

图 3　分离方向确定示意图

Fig. 3　Schematic of determination of the separating direction



(a) 节点发生分离前　　(b) 节点发生分离后

图 4　节点分离过程

Fig. 4　The separating processes of nodes

3）虚拟裂缝模型引入。在常规的有限元方法或二维拉格朗日元方法中引入虚拟裂缝模型的成功案例已有不少[12,19]。与常规的有限元方法相比，本研究方法适于处理大变形和塑性流动问题。在本研究中，虚拟裂缝模型的引入是通过在分离节点上施加黏聚力引起的节点力来实现的。裂缝的张开必然要消耗能量，单位面积上消耗的能量即为断裂能。由于Ⅱ型断裂能一般不容易测量且岩石宏观剪裂的细观机制之一是拉裂，所以只引入了 Ⅰ 型断裂能 G_f^{I}。随着裂缝的逐渐张开，裂缝承载能力必然逐渐减弱，即阻碍裂缝张开的力（裂缝面黏聚力引起的节点力）必然减少。在 G_f^{I} 未被完全消耗之前，裂缝仍具有一定的承载力，此时的裂缝为虚拟裂缝。否则，裂缝为真实裂缝。在理论上，对两个分离节点施加的

黏聚力引起的节点力应大小相等,方向相反,因为它们是一对内力。黏聚力引起的节点力 F_c 与裂缝张开度 w 的关系[12]为

$$F_c = \begin{cases} F_i^e\left(1 - \dfrac{w}{w_p}\right), & 0 \leqslant w \leqslant w_p \\ 0, & w > w_p \end{cases} \tag{4}$$

式中:w_p为 w 的最大值,$w_p = 2G_f^{\mathrm{I}}/\sigma_t$;$F_i^e$ 为节点发生分离时分离节点的弹性力。

应当指出,由于只对岩石拉裂问题进行模拟,因此上述黏聚力不包括切向黏聚力。另外,黏聚力乘以作用面积即为黏聚力引起的节点力。

2 算例及结果分析

2.1 单轴拉伸岩样

2.1.1 计算模型与方案

岩样被划分成若干正六面体单元,在岩样上端面施加垂直向上的速度 v,其大小为 0.01 m/s,在岩样下端面施加滚动支座,设岩样高度为 H,在 $H/2$ 处,即岩样上下对称面上设置允许开裂位置(图5)。计算在大变形条件下进行,不计重力。部分计算参数如下:密度为 2 700 kg/m^3,弹性模量为20 GPa,泊松比为0.2,σ_t 为2 MPa。

本研究共设计7个方案。方案1~方案3的差别仅在于 G_f^{I} 的取值,G_f^{I} 分别为100、300、500 N/m,岩样尺寸均为0.5 m×0.5 m×0.5 m,单元尺寸均为0.062 5 m。方案1、方案4 和方案5 的差别仅在于单元尺寸,后两者的单元尺寸分别为 0.125 m 和 0.031 25 m。方案1、方案6 和方案7 的差别仅在于岩样高度,后两者的岩样高度分别为 0.25 m 和 0.75 m。

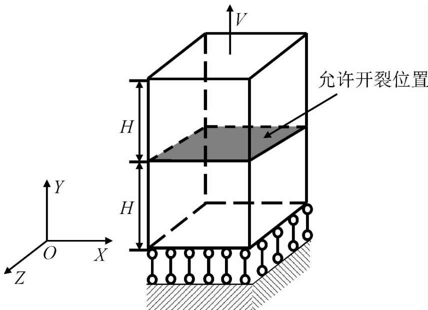


图5 计算模型

Fig. 5 Calculation model

2.1.2 结果分析

图6给出了方案1~方案3的载荷-位移曲线。其中,此载荷为岩样上端面的应力乘以原始横截面面积,此位移为岩样上端面任一节点的垂直位移。由图6可以发现以下结论。

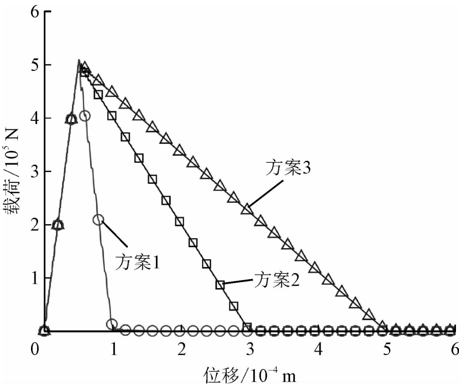


图6 方案1~方案3的载荷-位移曲线

Fig. 6 Load-displacement curves of schemes 1~3

1) G_f^{I} 对岩样的载荷-位移曲线的峰后斜率有明显的影响。随着 G_f^{I} 的增加,峰后斜率变大,即载荷-位移曲线的峰后部分变平缓。

2) G_f^{I} 对岩样的峰值载荷影响甚微。方案1~方案3的峰值载荷分别为 5.085×10^5、5.086×10^5、5.088×10^5 N,对应的峰值应力分别为 2.034、2.034 4、2.035 MPa,这与岩样的理论抗拉强度,即计算中所采用的抗拉强度(σ_t = 2 MPa)极为接近。这在一定程度上说明了当前计算结果的正确性。应当指出,3个方案的峰值荷载略有差异,这是因为显式差分方法造成的误差。

3) G_f^{I} 对峰后载荷刚降至零时的位移(临界位移)有明显影响。随着 G_f^{I} 的增加,临界位移显著增加。方案1~方案3的临界位移分别为 1.01×10^{-4}、3×10^{-4}、4.9×10^{-4} m。应当指出,该临界位移与虚拟裂缝的最大法向张开度相对应。此后,虚拟裂缝将成为真实裂缝(不再具有承受拉伸载荷的能力)。当虚拟裂缝处于向真实裂缝转化的临界状态时,岩样中各单元将处于零应力状态(无应力和变形)。此时,岩样上端面任一节点的位移将完全由真实裂缝所贡献。这也在一定程度上说明了当前结果的正确性。应当指出,在满足数值稳定的前提下,为了提高计算效率,时间步长取值略大,这使岩样允许开裂位置的所有节点同时发生分离。

图7~8分别给出了方案1和方案3的变形-拉裂过程。其中,单元颜色代表 σ_3,大于零代表拉伸,本研究中其他云图也是如此;节点位移的放大倍数为10,这是为了方便显示真实裂缝;N 为时步数目,其与岩样上端面任一节点的垂直位移或加载时间成

正比。由此可以发现:随着 N 的增加,岩样中各单元的 σ_3 先增加(岩样的变形处于峰前阶段),直至岩样被拉裂成上下两部分,此后,岩样中各单元的 σ_3 随着 N 的增加而下降(岩样的变形处于应变软化阶段)。

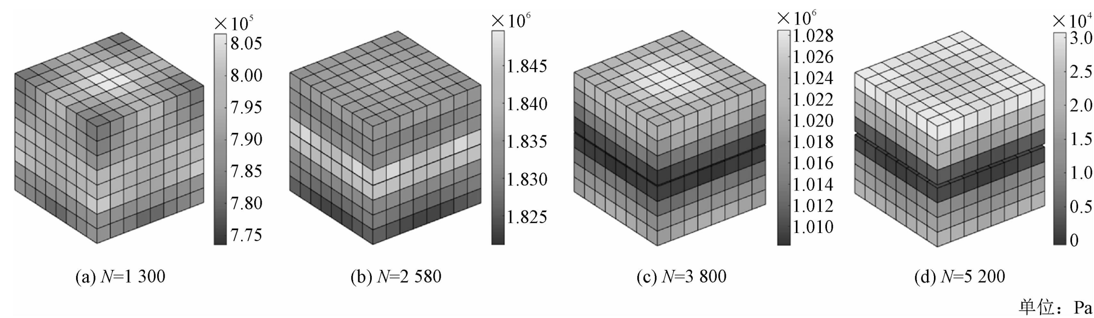


图 7　方案 1 的变形-拉裂过程中 σ_3 的时空分布

Fig. 7　Spatiotemporal distributions of σ_3 during the deformation and tensile cracking process in scheme 1

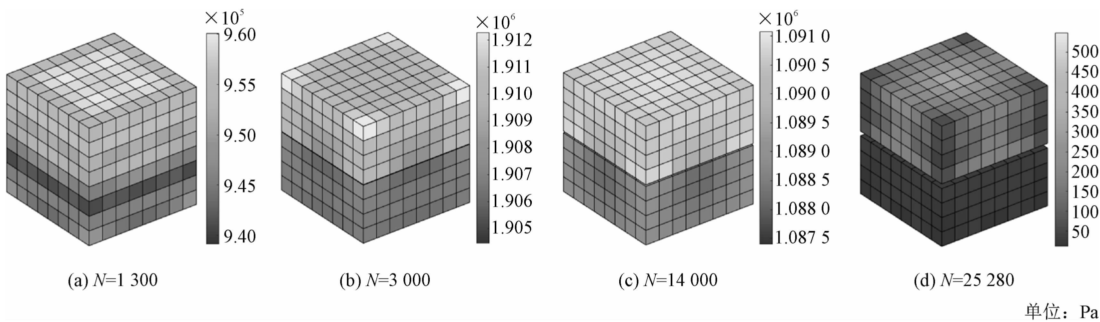


图 8　方案 3 的变形-拉裂过程中 σ_3 的时空分布

Fig. 8　Spatiotemporal distributions of σ_3 during the deformation and tensile cracking process in scheme 3

图 9 给出了方案 1、方案 4 和方案 5 的载荷-位移曲线,图 10 给出了方案 5 的变形-拉裂过程。可以发现,载荷-位移曲线的峰后部分的网格依赖性几乎消失。

图 11 给出了方案 1、方案 6 和方案 7 的载荷-位移曲线,图 12 给出了方案 7 的变形-拉裂过程。由此可以发现,载荷-位移曲线的峰后斜率明显受到岩样高度的影响。岩样高度越大,载荷-位移曲线的峰后部分越陡峭。也就是说,载荷-位移曲线的峰后部分明显具有尺寸效应,其斜率不能被视为材料参数(本构参数),而是一种由虚拟裂缝和之外弹性体构成的结构的响应。

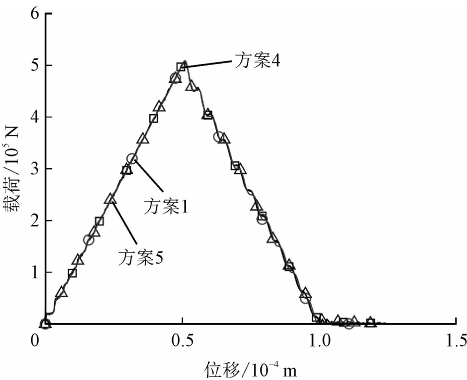


图 9　方案 1、方案 4 和方案 5 的载荷-位移曲线

Fig. 9　Load-displacement curves of scheme 1, scheme 4 and scheme 5

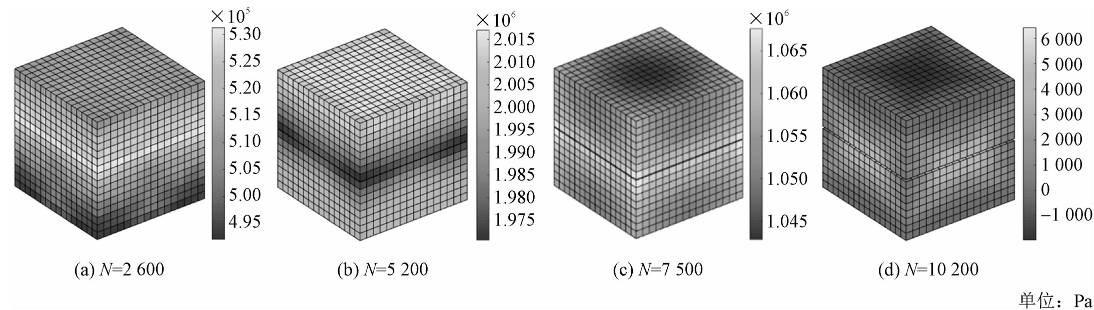


图 10　方案 5 的变形-拉裂过程中 σ_3 的时空分布

Fig. 10　Spatiotemporal distributions of σ_3 during the deformation and tensile cracking process in scheme 5

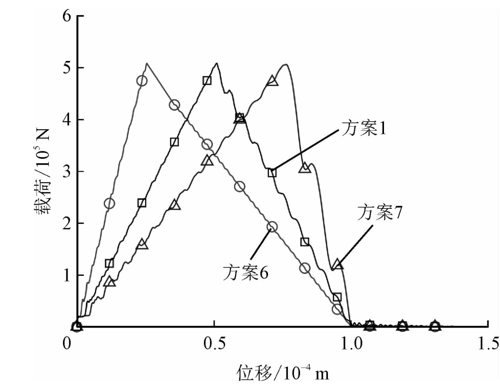


图11 方案1、方案6和方案7的载荷-位移曲线

Fig. 11 Load-displacement curves of scheme 1, scheme 6 and scheme 7

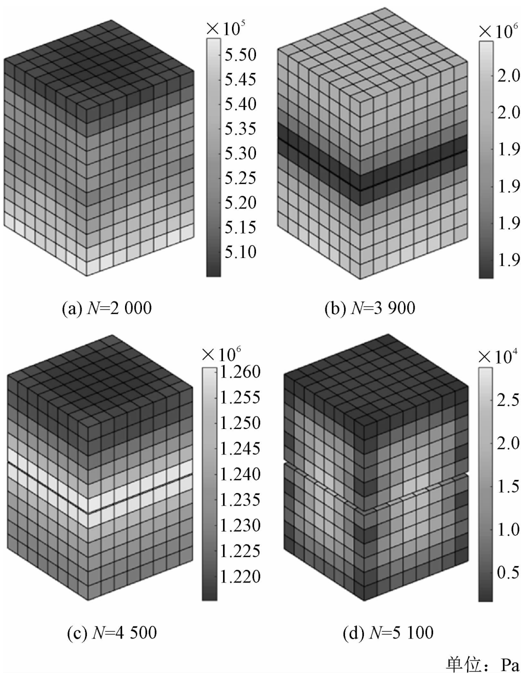


图12 方案7的变形-拉裂过程中 σ_3 的时空分布

Fig. 12 Spatiotemporal distributions of σ_3 during the deformation and tensile cracking process in scheme 7

另外，上述3个方案中均只有一条虚拟裂缝，而且临界位移和峰值载荷基本相同，这说明了3个方案消耗的能量（载荷-位移曲线与横轴所围成的面积）基本相同。单位面积上所消耗的能量即为 G_f^1，3个方案的 G_f^1 完全相同，这显然是正确的。

2.2 三点弯曲岩梁

2.2.1 计算模型与方案

岩梁尺寸为10 mm×3 mm×1 mm，被划分成40×12×4个正六面体单元。单元尺寸为 2.5×10^{-4} m。如图13所示，岩梁最初水平放置，岩梁垮度方向为 Z 方向，岩梁高度方向为 Y 方向。在岩梁的左、右侧面的下边分别施加球铰链和滚动支座。在岩梁的上端面且位于跨中位置的节点上施加垂直向下的 v，其大小为0.01 m/s。设岩梁的跨度为 L，在岩梁的跨中位置设置允许开裂位置（被施加速度的节点不允许开裂）。计算在大变形条件下进行，不计重力。部分计算参数如下：密度为2 700 kg/m^3，弹性模量为100 MPa，泊松比为0.167，σ_t 为1 MPa。

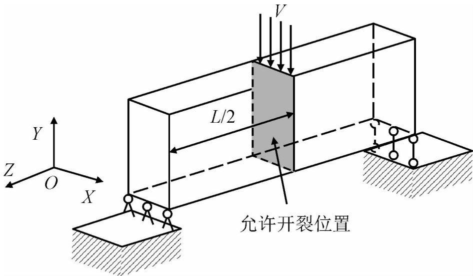


图13 计算模型

Fig. 13 Calculation model

本研究共设计3个方案。方案1～3的差别仅在于 G_f^1 的取值，分别为100、200、300 N/m。

2.2.2 结果分析

图14给出了方案1～3的载荷-位移曲线，同时，还给出了文献[20]的数值解。其中，此载荷为岩梁跨中位置被施加速度的节点的弹性力，此位移为上述任一节点的垂直位移。

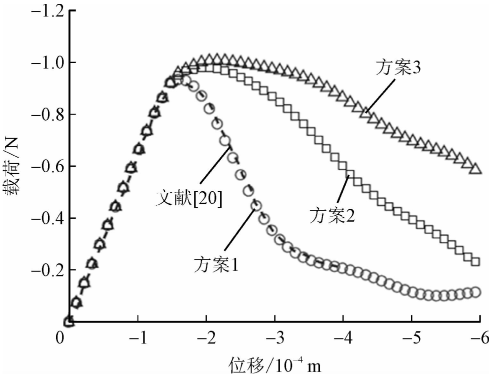


图14 方案1～3和文献[20]的载荷-位移曲线

Fig. 14 Load-displacement curves of schemes 1～3 and reference [20]

图15～图16分别给出了方案1和方案3的变形-拉裂过程。N 与岩梁跨中位置被施加速度的节点的垂直位移或加载时间成正比。由图15和图16可以发现，σ_3 总集中在裂缝尖端附近，随着裂缝的不断向上扩展，σ_3 集中区不断向上迁移。

由图14～图16可以得出以下结论。

1) G_f^1 对岩梁的峰值载荷和载荷-位移曲线的峰后斜率有明显的影响。随着 G_f^1 的增加,载荷峰值的绝对值增加,例如,方案 1 ~3 的载荷峰值分别为 -0.956 4、-0.998 5、-1.007 N;载荷-位移曲线的峰后斜率变大。这与文献[21]的结果在定性上相符。

2)在峰值载荷之前,三点弯曲岩梁已发生了拉裂。在不同方案中,峰值载荷时的拉裂程度有所不同,例如,方案 1 ~3 的拉裂缝长度分别为 0.001 75、0.002 25、0.002 5 m。

3)文献[20]利用扩展有限元法模拟了同一问题,方案 1 和文献[20]的载荷-位移曲线基本吻合。应当指出,方案 1 的岩梁尺寸、弹性模量、泊松比和 G_f^1 等计算参数均与文献[20]的一致。

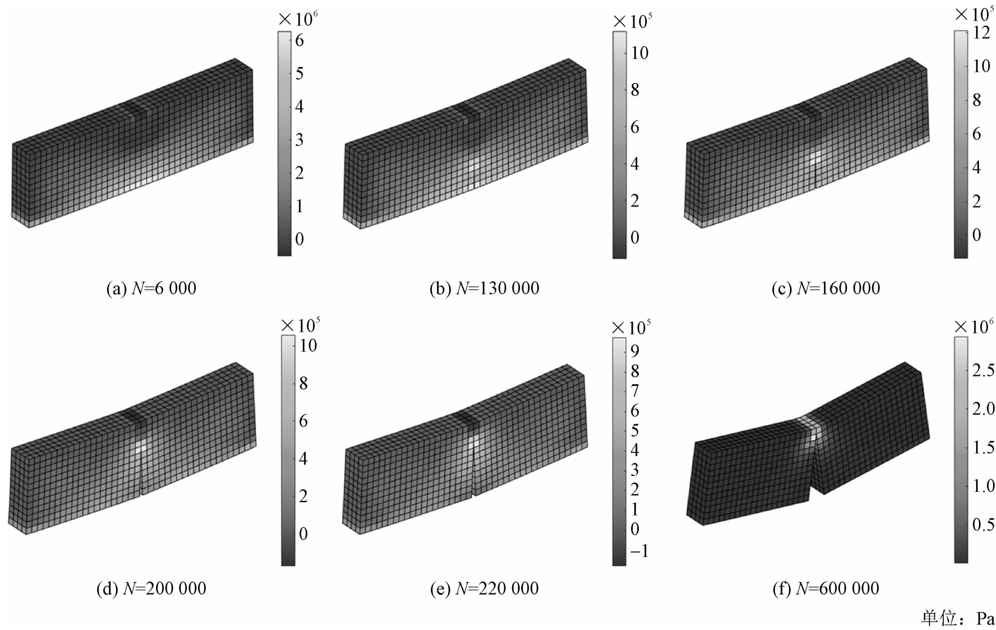


图 15　方案 1 的变形-拉裂过程中 σ_3 的时空分布

Fig. 15　Spatiotemporal distributions of σ_3 during the deformation and tensile cracking process in scheme 1

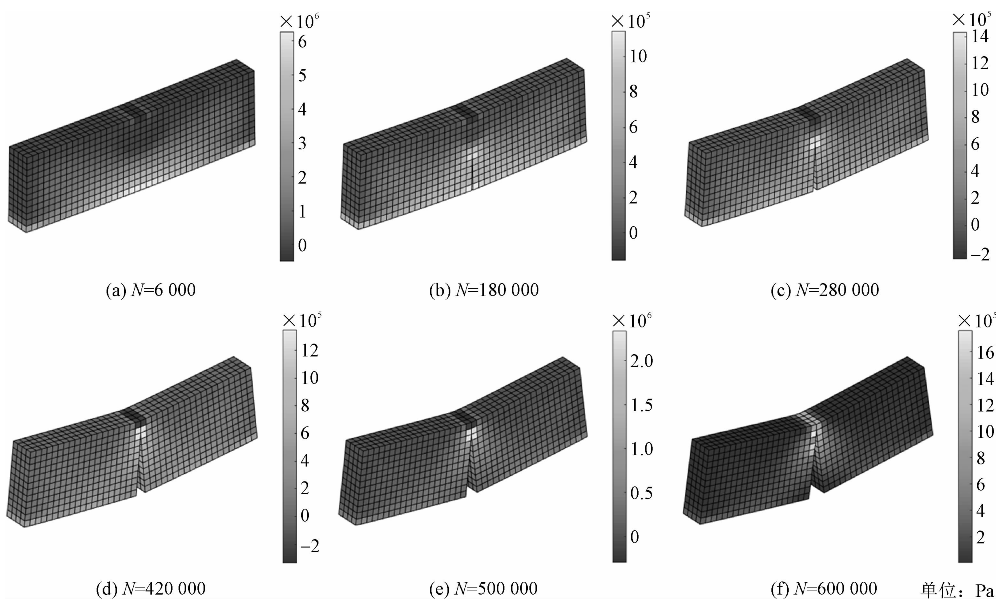


图 16　方案 3 的变形-拉裂过程中 σ_3 的时空分布

Fig. 16　Spatiotemporal distributions of σ_3 during the deformation and tensile cracking process in scheme 3

3 结 论

1)本研究提出了适于模拟岩石类材料变形-拉裂过程的三维可开裂拉格朗日元方法,其实质是三维拉格朗日元方法与断裂力学中虚拟裂缝模型的耦合方法,主要适用于立方体单元。以三维拉格朗日元方法为基础,引入虚拟裂缝模型的具体过程主要包括 3 个关键步骤:首先,进行节点分离判断;然后,确定裂缝扩展方向;最后,引入虚拟裂缝模型。

2)对于单轴拉伸岩样的载荷-位移曲线,随着Ⅰ型断裂能的增加,临界位移增加,峰后斜率变大,峰值载荷不受影响;峰后部分具有尺寸效应且几乎不具有网格依赖性。对于三点弯曲岩梁的载荷-位移曲线,随着Ⅰ型断裂能的增加,峰后斜率变大,峰值载荷的绝对值增加。同时,通过将本研究结果与单轴拉伸岩样峰值应力、临界位移的理论解和前人位移控制加载条件下三点弯曲岩梁的载荷-位移曲线的数值解进行对比,验证了本研究方法的正确性,这为将来的工作奠定了良好的基础。

参考文献:

[1] 宫凤强,伍武星,李天斌,等. 深部硬岩矩形隧洞围岩板裂破坏的试验模拟研究[J]. 岩土力学,2019,40(6):2085-2098.
GONG Fengqiang,WU Wuxing,LI Tianbin,et al. Simulation experimental study of spalling failure of surrounding rock of rectangular tunnel of deep hard rock[J]. Rock and soil mechanics,2019,40(6):2085-2098(in Chinese).

[2] GONG F Q,LUO Y,LI X B,et al. Experimental simulation investigation on rockburst induced by spalling failure in deep circular tunnels[J]. Tunnelling and underground space technology,2018,81:413-427.

[3] RASHID Y R. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels[J]. Nuclear engineering and design,1968,7(4):334-344.

[4] BAŽANT Z P,OH B H. Crack band theory for fracture of concrete[J]. Matériaux et construction,1983,16(3):155-177.

[5] ELFGREN L. Fracture mechanics of concrete structures[M]. London:Chapman and Hall,1989.

[6] JIRÁSEK M,ZIMMERMANN T. Rotating crack model with transition to scalar damage[J]. Journal of engineering mechanics,1998,124(3):277-284.

[7] MITELMAN A,ELMO D. Modelling of blast-induced damage in tunnels using a hybrid finite-discrete numerical approach[J]. Journal of rock mechanics and geotechnical engineering,2014,6(6):565-573.

[8] MUNJIZA A. The combined finite-discrete element method[M]. Hoboken,NJ:Wiley,2004.

[9] 郭翔. 基于势接触力的二维连续-非连续方法研究[D]. 阜新:辽宁工程技术大学,2017.

[10] 冯春,李世海,郝卫红,等. 基于 CDEM 的钻地弹侵彻爆炸全过程数值模拟研究[J]. 振动与冲击,2017,36(13):11-18,26.
FENG Chun,LI Shihai,HAO Weihong,et al. Numerical simulation for penetrating and blasting process of EPW based on CDEM[J]. Journal of vibration and shock,2017,36(13):11-18,26(in Chinese).

[11] 严成增,孙冠华,郑宏,等. 基于局部单元劈裂的 FEM/DEM 自适应分析方法[J]. 岩土力学,2014,35(7):2064-2070.
YAN Chengzeng,SUN Guanhua,ZHENG Hong,et al. Adaptive FEM/DEM analysis method based on local splitting elements[J]. Rock and soil mechanics,2014,35(7):2064-2070(in Chinese).

[12] 王学滨,白雪元,祝铭泽,等. 拉格朗日元与虚拟裂缝模型耦合方法及准脆性材料拉伸试验模拟[J]. 应用力学学报,2019,36(6):1367-1373.
WANG Xuebin,BAI Xueyuan,ZHU Mingze,et al. A method coupled by the Lagrangian element and the fictitious crack model and modeling of tensile tests of quasibrittle materials[J]. Chinese journal of applied mechanics,2019,36(6):1367-1373(in Chinese).

[13] 郭翔,王学滨,白雪元,等. 加载方式及抗拉强度对巴西圆盘试验影响的连续-非连续方法数值模拟[J]. 岩土力学,2017,38(1):214-220.
GUO Xiang,WANG Xuebin,BAI Xueyuan,et al. Numerical simulation of effects of loading types and tensile strengths on Brazilian disk test by use of a continuum-discontinuum method[J]. Rock and soil mechanics,2017,38(1):214-220(in Chinese).

[14] 王学滨,陈忠元,郭瑞,等. 预设 V 形缺口的单向拉伸岩样变形-开裂过程模拟——基于连续-非连续方法[J]. 防灾减灾工程学报,2018,38(2):209-215.
WANG Xuebin,CHEN Zhongyuan,GUO Rui,et al. Modeling of deformation-cracking processes of rock specimens with V-shaped notches in uniaxial tension—based on a continuum-discontinuum method[J]. Journal of disaster prevention and mitigation engineering,2018,38(2):209-215(in Chinese).

[15] 王学滨,郭翔,芦伟男,等. 三点弯梁开裂过程及尺寸效应的连续-非连续方法模拟[J]. 地下空间与工程学报,2018,14(6):1587-1593.
WANG Xuebin,GUO Xiang,LU Weinan,et al. Modeling of cracking processes and size effects of three-point bending beams using a continuum-discontinuum method[J]. Chinese journal of under-

ground space and engineering, 2018, 14(6): 1587-1593(in Chinese).

[16] 王学滨,芦伟男,钱帅帅,等.静水压力条件下开挖直径及卸荷时间对巷道围岩变形-开裂影响的连续-非连续方法模拟[J].应用力学学报,2020,37(4):1841-1848.
WANG Xuebin, LU Weinan, QIAN Shuaishuai, et al. Numerical simulation of effects of the excavation unloading time and chamber diameter on deformation-cracking processes of the chamber surrounding rock under hydrostatic pressure[J]. Chinese journal of applied mechanics,2020,37(4):1841-1848(in Chinese).

[17] 侯艳丽,周元德,张楚汉.用非连续介质力学模型研究混凝土的Ⅰ型断裂[J].清华大学学报(自然科学版),2006,46(3):346-349.
HOU Yanli, ZHOU Yuande, ZHANG Chuhan. Mode Ⅰ-concrete fracture analysis using a discontinuous medium mechanics model [J]. Journal of Tsinghua University(science and technology), 2006,46(3):346-349(in Chinese).

[18] 陈育民,徐鼎平.FLAC/FLAC3D 基础与工程实例[M].北京:中国水利水电出版社,2009.

[19] 方修君,金峰,王进廷.基于扩展有限元法的粘聚裂纹模型[J].清华大学学报(自然科学版),2007,47(3):344-347.
FANG Xiujun, JIN Feng, WANG Jinting. Cohesive crack model based on extended finite element method[J]. Journal of Tsinghua University(science and technology), 2007, 47(3): 344-347(in Chinese).

[20] WELLS G N, SLUYS L J. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements[J]. International journal for numerical methods in engineering,2001,50(12):2667-2682.

[21] 侯艳丽,张楚汉.用三维离散元实现混凝土Ⅰ型断裂模拟[J].工程力学,2007,24(1):37-43.
HOU Yanli, ZHANG Chuhan. Mode Ⅰ-fracture simulation of concrete based on 3D distinct element method[J]. Engineering mechanics,2007,24(1):37-43(in Chinese).

（编辑　史淑英）